

物理 問題 I

電位の基準, および静電気力による位置エネルギーの基準を無限遠とし, 重力の影響は無視できるとして, 次の問いに答えよ。

問 1. 真空中のある点に電気量 $1.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ の点電荷 1 を固定し, この点電荷から 0.10 m 離れた位置を点 P とする。真空中でのクーロンの法則の比例定数を $9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ とし, (1) ～ (4) の物理量を有効数字 2 桁で答えよ。解答欄の括弧内に単位記号を書くこと。

- (1) 点 P における電場 (電界) の大きさ
- (2) 点 P における電位
- (3) 点 P に電気量 $1.0 \times 10^{-2} \text{ C}$ の点電荷 2 を置いたとき, 点電荷 2 にはたらく静電気力の大きさ
- (4) 点 P に電気量 $1.0 \times 10^{-2} \text{ C}$ の点電荷 2 を置いたとき, 点電荷 2 がもつ静電気力による位置エネルギー

真空中に図 1 のような x - y 平面を考え, 点 $A(-a, 0)$ ($a > 0$) に電気量 $-9Q$ ($Q > 0$) の点電荷を固定した。以下では真空中でのクーロンの法則の比例定数を k_0 とする。

問 2. 点 B を $(0, 2\sqrt{2}a)$, 点 C を $(3a, 0)$ とし, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B における電場の x 成分と電位をそれぞれ求めよ。
- (2) 電気量 Q の点電荷 3 に外力を加えて点 B で静止させた。その後, この外力を変化させて点電荷 3 を点 B から点 C までゆっくりと移動させた。点 B から点 C まで移動させる間にこの外力が点電荷 3 にした仕事を求めよ。
- (3) x 軸に平行に一樣な電場を加えた後, 外力を変化させて点 C にある点電荷 3 を点 B までゆっくりと移動させた。点 C から点 B まで移動させる間にこの外力が点電荷 3 にした仕事は 0 であった。加えた電場の x 成分を求めよ。

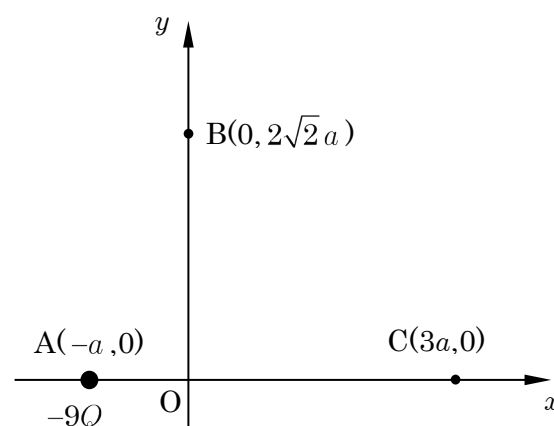


図 1

次に, 加えていた一樣な電場を取り除いた後, 図 2 のように x 軸上の点 $D(a, 0)$ に電気量 Q の点電荷 3 を移動させて固定した。 $x > a$ となる x 軸上の点について答えよ。

問 3. 電場が 0 になる位置を点 E とする, 点 E の x 座標を求めよ。ただし, 無限遠は除く。

問 4. 電位が 0 になる位置を点 F とする。点 F の x 座標を求めよ。ただし, 無限遠は除く。

問 5. 質量 m , 電気量 Q の点電荷 4 に外力を加えて点 F で静止させた後, この外力を静かに取り除くと点電荷 4 は点 E に向かって動き始めた。点 E に達したときの点電荷 4 の速さを求めよ。

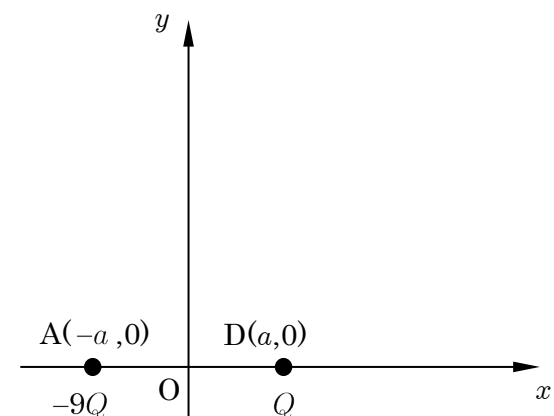


図 2

問 6. 点 A と点 D に固定した 2 つの点電荷から, 十分遠方にある x 軸上の点 $G(x, 0)$ ($x \gg a$) における電場について考える。このとき a は x に比べて無視できるほど小さくなるため, 2 つの点電荷は原点にあるとみなすことができる。このように考えたときの点 G における電場の x 成分として最も適切なものを以下の選択肢の中から 1 つ選び, 番号で答えよ。

- 選択肢 ① $-k_0 \frac{9Q^2}{x^2}$ ② $-k_0 \frac{9Q^2}{x}$ ③ $-k_0 \frac{8Q}{x^2}$ ④ $-k_0 \frac{8Q}{x}$ ⑤ $k_0 \frac{8Q}{x^2}$ ⑥ $k_0 \frac{8Q}{x}$ ⑦ $k_0 \frac{9Q^2}{x^2}$ ⑧ $k_0 \frac{9Q^2}{x}$

物理 問題 II

【1】図1のように、ばね定数 k の軽いばねの一端に質量 m の小物体Cをつないで水平な床に置き、ばねが水平となるようにもう一端を壁に固定した。ばねが伸びる向きを正として x 軸をとり、ばねの長さが自然の長さのときの小物体Cの位置を原点O ($x=0$) とする。手で小物体Cに x 軸に平行な力を加え、位置 $x=-L$ ($L>0$) に移動させてから静止させた。重力加速度の大きさを g とし、小物体Cが原点Oに位置するときの小物体Cの位置エネルギーを0として、次の問いに答えよ。

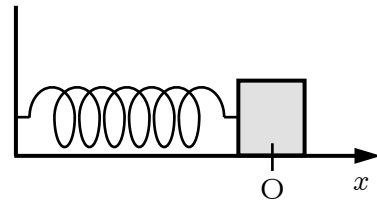


図1

● 床があらい場合について考える。小物体Cと床の間の静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とする。

問1. 位置 $x=-L$ において、手で小物体Cに加えていた x 軸に平行な力を、向きは変えずに徐々に弱くしていくと、やがて小物体Cは滑り始めた。小物体Cが滑り始めるとともに静かに手をはなすと、その後小物体Cは原点Oを通過した。

- (1) 小物体Cが滑り始める直前の、手で小物体Cに加えていた力の大きさを求めよ。
- (2) 手をはなしてから初めて原点Oを通過するまでの間に、小物体Cにはたらく摩擦力が小物体Cにした仕事を求めよ。
- (3) 手をはなしてから初めて原点Oを通過するまでの間の、小物体Cがもつ弾性力による位置エネルギーの変化を求めよ。
- (4) 手をはなした後、初めて原点Oを通過する瞬間の小物体Cの運動エネルギーを求めよ。

● 以下では床がなめらかな場合 ($\mu=\mu'=0$) について考える。

問2. 位置 $x=-L$ において、小物体Cから静かに手をはなすと、小物体Cは単振動を始めた。手をはなした時刻を $t=0$ 、この単振動の角振動数を ω とする。

- (1) 角振動数 ω を k , m , L の中から必要なものを用いて表せ。
- (2) 手をはなした後の、時刻 t における小物体Cの位置を L , t , ω を用いて表せ。
- (3) 小物体Cの位置が x 、運動量が p のときの小物体Cの力学的エネルギーを k , m , x , p を用いて表せ。
- (4) 小物体Cの運動量の大きさの最大値を k , m , L を用いて表せ。

問2の単振動をする小物体Cの運動量 p も位置 x と同様に周期的に変化する。そのため、位置 x を横軸に、運動量 p を縦軸にとったグラフで小物体Cの運動を表すと、時刻 $t=t_0$ のときの位置と運動量とが点 (x_0, p_0) で表される場合、単振動の一周期だけ時間が経つと同じ点 (x_0, p_0) に戻ってくる。したがって、 x - p 平面内で小物体Cの軌跡は閉じた図形となる。

【例】ある小物体が水平でなめらかな線分上を等速で運動し、両端で弾性衝突を繰り返す場合

線分に沿って x 軸をとり、両端の座標を $x=0, L$ とする。小物体の運動量は、両端以外では変化せず、両端では衝突の前後で大きさは変わらずに逆向きになるため、 x - p 平面内での小物体の軌跡は図2のように長方形の閉じた図形になる。図2の矢印は、軌跡上の点の時間変化の向きを表す。

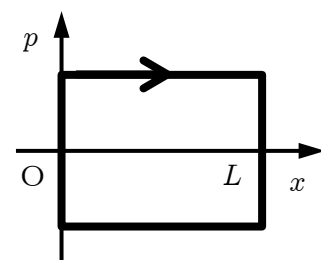


図2

問2の単振動をする小物体Cの x - p 平面内での軌跡の形を知るために、力学的エネルギー保存則を表す式を変形してみると、定数 a を用いて $x^2 + (ap)^2 = L^2$ の形に書き換えられる。

問3. 定数 a を k , m を用いて表せ。

問4. この単振動をする小物体Cの x - p 平面内での軌跡の概形を解答欄のグラフに示せ。軌跡と x 軸との交点の x 座標、および p 軸との交点の p 座標のすべてを L , a の中から必要なものを用いて示し、図2のように、軌跡上の点の時間変化の向きも矢印で示すこと。なお、 x - p 平面内での図形は、 x -(ap)平面内での図形の縦軸 (ap 軸) を $1/a$ 倍にしたものである。

問5. 問4の図形の面積を L , a を用いて表せ。なお、面積が A の図形の縦軸を $1/a$ 倍にした図形の面積は A/a である。

問6. 小物体Cの力学的エネルギーを E として、問4の図形の面積を ω , E を用いて表せ。

次のページの後半の【3】で考察するように、原子や分子などのミクロの世界では物質にも波動性があり、それにより問4の図形の面積がとびとびになると解釈できる。

【2】物理量がとびとびの値をとる現象の例に，弦の振動がある。弦の振動に関する次の問いに答えよ。

両端を固定した長さ L の弦を振動させたところ，腹の数が n 個（ n は自然数）の定在波（定常波）が生じた。このときの弦を伝わる波の波長を λ_n とする。

問 7. 波長 λ_n を L , n を用いて表せ。

【3】物質の波動性に関する次の問いに答えよ。

ミクロの世界では，物質も波動性を示す。この波動性が，【1】の後半で考察した小物体の x - p 平面内での軌跡に与える影響について考察してみよう。ここでは，波動性を示すミクロな粒子 Q が，前のページの【例】で示した運動をする場合を考える。

粒子 Q は波としての性質をもち，運動する区間の両端が固定端となるような運動状態だけが安定して存在できる。そのため，その波長（ド・ブローイ波長）は【2】の弦と同様にとびとびの値をとる。すなわち，腹の数が n 個の定在波が生じる運動状態の粒子 Q のド・ブローイ波長は問 7 の λ_n と同じ式で表される。粒子 Q の運動量の大きさはド・ブローイ波長とプランク定数 h で表されるため，粒子 Q がとり得る運動量の大きさもとびとびとなる。

一方，粒子性に着目すると，運動量の大きさは変化せず，向きだけが弾性衝突により変化するため，粒子 Q の x - p 平面内での軌跡は，前のページの図 2 のような長方形となる^{注1)}。粒子 Q がとり得る運動量の大きさは波動性によりとびとびとなるため，この長方形の面積がとり得る値もとびとびとなる。具体的には，その値は腹の数が 1 個の定在波が生じる運動状態のときの面積を H として，その自然数倍となる。

注 1) 量子力学では粒子の位置と運動量を同時に決めることはできないが，ここでは通常の粒子の運動のように扱えるとする。

問 8. 腹の数が n 個の定在波が生じる運動状態の粒子 Q の運動量の大きさを λ_n , h を用いて表せ。

問 9. 面積 H を L , h の中から必要なものを用いて表せ。

問 9 から分かるように， H は定数となる^{注2)}。実は，「粒子 Q の x - p 平面内での軌跡が作る図形の面積がとり得る値が定数 H の自然数倍となる」という帰結は，前のページの【例】だけではなく，どんな周期運動でも成立する。例えば，粒子 Q がミクロの世界で，（【1】の後半で考察したような）フックの法則に従う復元力を受けて角振動数 ω で単振動している場合にも成立する。この場合，図形の面積が nH のようにとびとびになると，【1】の問 6 の関係式によって粒子 Q の力学的エネルギーもとびとびとなる。その結果，粒子 Q の力学的エネルギーは ω , n , H を用いて表される。

ここで，粒子 Q が電荷をもっていて，その力学的エネルギーが問 6 の関係式を満たす場合を考えてみよう。粒子 Q が単振動すると，粒子 Q のまわりの電場（電界）も単振動と同じ周期で振動する。この振動は電磁波として空間を伝わっていく。電磁波が放出されると，そのエネルギーの分だけ粒子 Q がもつ力学的エネルギーが減少するが，粒子 Q のとり得る力学的エネルギーがとびとびの場合，放出される電磁波のエネルギーもとびとびになる。

注 2) 縦軸に速度 v をとった x - v 平面で考えると， H に相当する量は質量に依存してしまい，定数とはならない。

問 10. 放出される電磁波の振動数を ν として，電磁波のエネルギーの最小単位を ν , H を用いて表せ。